Departamento de Matemática
Faculdade de Ciências e Tecnologia

U C

Faculdade de Economia

Selecção de Portefólios: O Impacto da Liquidez

Mónica Carvalho Martinho

Dissertação para a obtenção do Grau de

Mestre em Métodos Quantitativos em Finanças

Júri

Presidente: Professor Doutor Luís Filipe de Castro Nunes Vicente

Orientador: Professor Doutor Helder Miguel Correia Virtuoso Sebastião

Vogal: Professora Doutora Ana Margarida Machado Monteiro

Data: Fevereiro de 2015

Resumo

A literatura tem apresentado várias extensões do modelo média-variância para a selecção de portefólios, nomeadamente através da inclusão de custos de transacção. Recentemente, a estratégia $1/N$, que não requer qualquer tipo de optimização, tem sido apresentada como uma das mais eficientes, sobretudo na presença de custos de transacção. O presente estudo propõe uma metodologia de selecção de portefólios eficientes através da incorporação de medidas de liquidez observadas no mercado. A estratégia é aplicada aos índices PSI20 e CAC40 considerando o *spread bid-ask* como *proxy* da liquidez. A análise dos rácios de Sharpe fora da amostra indiciam que o modelo proposto é competitivo em relação aos modelos alternativos, sendo a sua superioridade mais visível em mercados periféricos, com reduzida liquidez, como o mercado português.

Palavras Chave: selecção de portefólios, liquidez, custos de transacção, *spread bid-ask*, índices PSI20 e CAC40

Abstract

The literature has presented a number of variants of the mean-variance model for portfolio selection, namely with the inclusion of trading costs. Recently, the $1/N$ strategy, which does not require any type of optimization, has been shown to be one of the most efficient strategies, especially with the existence of trading costs. This study proposes an approach for efficient portfolio selection based on the incorporation of realized liquidity measures. The strategy is applied to the PSI20 and CAC40 indexes by considering the spread bid-ask as a proxy for liquidity. The results of the out-of-sample Sharpe ratios show that the proposed model is quite competitive in relation to the alternative models, being its superiority more visible in satellite markets, with low liquidity, as it is the case of the Portuguese market.

Keywords: portfolio selection, liquidity, transaction costs, spread bid-ask, PSI20 and CAC 40 indexes

Agradecimentos

A elaboração desta dissertação não teria sido possível sem o contributo de algumas pessoas, às quais quero expressar aqui os meus sinceros agradecimentos.

Ao meu orientador, Professor Doutor Helder Sebastião, pela paciência, dedicação, orientação científica e revisão desta dissertação.

A todos os Professores que me acompanharam durante o meu percurso académico, bem como ao Departamento de Matemática e Faculdade de Economia por todos os recursos disponibilizados.

À minha família, em especial ao meu Pai, por todo o tempo que dispôs no meu crescimento e formação, mas também pela possibilidade que me proporcionou em estudar nesta Universidade.

Por fim, não podia deixar de agradecer ao Rodrigo, às minhas colegas de mestrado e aos meus amigos que contribuíram de forma directa ou indirecta para a realização desta dissertação.

Conteúdo

1 Introdução **1**

2 Incorporação dos Custos de Transacção **5**

2.1 Da Liquidez ao *Spread Bid-Ask* 5
2.2 Modelos com Incorporação dos Custos de Transacção 8

3 Metodologia **13**

3.1 Modelos Alternativos de Selecção de Portefólios 13
3.2 Portefólio com máximo Rácio de Sharpe Condicional 15
3.3 O Desempenho das Estratégias 16

4 Dados e Análise Preliminar **19**

4.1 Dados 19
4.2 Análise Preliminar 20

5 Análise de Resultados **25**

6 Conclusões **29**

Apêndice A **31**

Apêndice B **33**

Bibliografia **35**

Capítulo 1

Introdução

O principal objectivo de um investidor racional consiste em maximizar a utilidade esperada, o que implica, em ambiente de incerteza, a maximização do retorno esperado ajustado ao risco. Mais especificamente, tratando-se duma intervenção no mercado accionista, a estratégia de investimento implica a adopção de uma regra de transacção que permita determinar as proporções de cada título no portefólio.

O modelo de média-variância de Markowitz [21] é consensualmente apontado como o início da sistematização da teoria sobre selecção de portefólios. O autor defendia que o processo de selecção de um portefólio deve iniciar-se com a recolha de dados históricos e com a formulação de expectativas sobre os futuros desempenhos dos activos disponíveis, culminando com a aplicação de métodos objectivos para a escolha do portefólio. Assim, o investidor deve escolher um portefólio, de entre um conjunto de portefólios realizáveis, que minimiza o risco, medido através da sua variância, para um determinado retorno esperado. Markowitz salienta ainda que o risco do portefólio é uma função decrescente do número de activos incluídos no portefólio, e portanto o investimento deve ser razoavelmente diversificado.

Ao longo dos anos, várias foram as extensões apresentadas ao modelo tradicional de média-variância. DeMiguel et al. [10] sintetiza um número considerável de metodologias inspiradas no modelo inicial de Markowitz, testando-as em sete base de dados diferentes, concluindo no entanto que nenhuma das estratégias é consistentemente melhor que a estratégia simples $1/N$, a qual não requer qualquer tipo de optimização. Basicamente, os autores argumentam que tal se deve ao facto das técnicas baseadas no modelo média-variância serem muito sensíveis aos *inputs*, os quais têm erros de estimação não negligenciáveis; sobretudo as médias. Logo, a implementação de portefólios tendo por base os momentos estimados através de amostras análogas produzem muitas vezes pesos que diferem substancialmente ao longo do tempo e têm um pobre desempenho fora da amostra.

A esmagadora maioria dos estudos sobre a selecção de portefólios considera como única fonte de informação as séries históricas dos retornos de transacção. No entanto, acontecimentos recentes como a crise do *subprime*, que acarretou uma crise de liquidez quer das instituições financeiras quer dos mercados financeiros, têm vindo a realçar a importância desta dimensão na tomada de decisão do investidor. Efectivamente, quanto menor é a liquidez, maiores são os custos de transacção explícitos e implícitos e portanto menor é o retorno final líquido do investimento. A iliquidez pode inclusive rivalizar com o risco de preço enquanto factor de diminuição da utilidade do investimento e portanto não deve ser ignorada na tomada de decisão sobre a selecção de portefólios.

Não existe nenhuma definição consensual de liquidez, todavia é usual definir a liquidez dos activos em termos da maior ou menor facilidade de transacção desse activo, quer em termos de tempo quer em termos de custos. Assim, a liquidez dum activo pode ser medida pelo montante médio que um investidor está disposto a pagar para o vender imediatamente em vez de protelar essa transacção. Portanto, a liquidez está inversamente relacionada com os custos de informação e de transformação. Mais concretamente, com os custos na obtenção de informação sobre os rendimentos esperados do título e sobre possíveis contrapartes, e com os custos de transformação desses títulos em moeda, cuja liquidez é absoluta.

Amihud e Mendelson [3] afirmam que a liquidez pode ser medida pelo custo de execução imediata. Um investidor disposto a transaccionar um activo enfrenta um *trade off*: pode transaccionar o activo a um preço futuro mais favorável ou executar imediatamente essa transacção ao preço *bid* ou *ask* corrente. Os preços *ask* e *bid* incluem uma penalização pela compra e venda imediatas, e portanto o *spread bid-ask* apresenta-se como uma *proxy* bastante natural da liquidez.

Todavia, a liquidez parece não ter apenas um impacto directo, via custos de transacção, no resultado final dos investimentos. Segundo, alguns autores o impacto é duplo: quer directo quer indirecto, neste caso via efeitos sobre os preços de transacção e portanto sobre a média e a variância dos retornos. Amihud e Mendelson [4] propõem um modelo baseado na hipótese que os retornos dos activos são uma função côncava e crescente do *spread bid-ask*, realçando a existência de uma relação negativa entre o *spread* e os preços dos activos . Domowitz e Bollerslev [7] destacam a importância do *spread bid-ask* e do seu respectivo comportamento para explicar a inconstância da variância condicional dos retornos. Recentemente, outros autores como Chordia et al. [9] e Pástor e Stambaugh [23] têm vindo a realçar a existência de factores comuns à liquidez, definidos como comovimentos na liquidez dos activos causados pelos investidores e correctores ao tentarem coincidir as suas decisões de transacção. Esta conclusão tem-se revelado bastante robusta devido à observação deste fenómeno com diferentes técnicas de estimação e em diversas amostras e frequências. Domowitz [13] examina a causa destes factores comuns e avalia as suas implicações sobre o preço dos activos, demonstrando a existência de uma relação entre os comovimentos da liquidez e dos retornos. Acharya e Pedersen [1] salientam que a existência de factores comuns à liquidez implicam que a liquidez de cada activo é função da liquidez do mercado como um todo e portanto a iliquidez deve implicar um prémio no retorno de cada activo. Deste modo, tal como as correlações dos retornos são relevantes para a estimação do risco e do retorno esperado do portefólio, os factores comuns à liquidez são importantes para a determinação dos custos de transacção esperados e da rentabilidade final do investimento.

O presente trabalho propõe a selecção de portefólios eficientes tendo por base não só o retorno esperado e o risco de preço mas também a liquidez, medida através do *spread bid-ask*. Portanto, a estratégia de selecção de portefólios consiste na maximização do retorno após custos de transacção efectivos por unidade de risco de preço.

O presente estudo tem a seguinte estrutura. No Capítulo 2 são apresentados os argumentos para a incorporação dos custos de transacção na estratégia de selecção de portefólios. No Capítulo 3 é efectuada uma apresentação sumária de vários modelos concorrentes de selecção de portefólios e do modelo que maximiza o rácio de Sharpe condicional após os custos de transacção. É descrita a metodologia de análise de desempenho das estratégias e apresentado os resultados expectáveis dessa comparação. O Capítulo 4 apresenta os dados e algumas estatísticas preliminares. O Capítulo 5 é dedicado à apresentação e interpretação dos resultados empíricos. No último capítulo resumem-se as principais conclusões.

Capítulo 2

Incorporação dos Custos de Transacção

2.1 Da Liquidez ao *Spread Bid-Ask*

A crise financeira global de 2007-2009 esteve associada a severos choques de liquidez nos activos financeiros a nível mundial. A crise mostrou vivamente que a liquidez de mercado pode-se deteriorar drasticamente, mas o ponto a destacar é que a liquidez não é constante, ocorrendo alterações ao longo do tempo tanto na liquidez dos activos como na liquidez do mercado como um todo.

Independentemente do prazo considerado, a liquidez não é constante devido a várias razões [6]. Primeiro, a liquidez depende em parte da transparência de informação sobre o valor dos activos, que pode alterar-se ao longo do tempo. Segundo, a liquidez depende do número de investidores que providenciam liquidez ao mercado (bancos, *market makers*, firmas de corretagem e *hedge funds*) e do seu acesso ao capital [8]. Quando estes investidores realizam perdas e o acesso ao financiamento é restrito - como aconteceu em 2008 - o resultado é uma falta conjuntural de liquidez no mercado. Terceiro, o aumento da incerteza faz com que a oferta de liquidez seja mais arriscada, aumentando o prémio exigido para providenciar liquidez, e portanto o custo de transacção [4].

Por outro lado a liquidez auto-alimenta-se [6]. Quanto maior é a disponibilidade para transaccionar num dos lados do mercado, maior a possibilidade de transacção para os investidores do outro lado do mercado e portanto maior a liquidez do mercado como um todo. Inversamente, o afastamento de investimentos com objectivos de liquidez pode criar, pelo menos temporariamente, uma espiral descendente que leva à deterioração da liquidez, e a alterações dos preços dos activos.

O argumento anterior põe em foco a importância dos choques de liquidez, que tendo algum nível de persistência, tendem a afectar os preços dos activos. Por exemplo, se ocorre uma redução na liquidez do mercado resultando num aumento persistente dos custos de transacção, é expectável que os preços dos activos diminuam. Isto porque os investidores irão requerer retornos esperados superiores para fazer face aqueles custos.

Adicionalmente, dada a incerteza dos choques de liquidez de mercado gera-se assim maior incerteza quanto aos retornos dos activos. Os choques de liquidez são, nesta perspectiva, uma fonte de risco sistemático, que deve ter um preço determinado pelos investidores avessos ao risco. A transmissão de choques de liquidez aos preços difere entre activos, pois a relação entre retornos e choques de liquidez é diversa. Pástor e Stambaugh [23] e Acharya e Pedersen [1] apresentam resultados empíricos que suportam que a exposição aos choques de liquidez deve ser devidamente remunerada pelo mercado.

Acharya e Pedersen [1] apresentam um modelo CAPM (*Capital Asset Pricing Model*) ajustado à liquidez sob a seguinte proposição: investidores avessos ao risco requerem altos retornos esperados sobre activos com alta exposição ao risco de liquidez. O modelo tem como objectivo explicar como os preços dos activos são afectados pelo risco de liquidez e por factores comuns à liquidez. São consideradas três medidas de risco de liquidez: (i) os factores comuns à liquidez dos activos e à liquidez do mercado como um todo, $cov(c_i, c_M)$, sendo c_i os custos de iliquidez do activo i e c_M os custos de iliquidez do mercado, (ii) a sensibilidade dos retornos à liquidez do mercado, $cov(r_i, c_M)$ e, (iii) a sensibilidade da liquidez ao retorno dos mercados, $cov(c_i, r_M)$.

Os autores estão interessados em saber como os retornos esperados mensais dos activos i

$$r_{it} = \frac{div_{it} + P_{it}}{P_{it-1}}, \tag{2.1}$$

dependem do seu custo de iliquidez relativo,

$$c_{it} = \frac{C_{it}}{P_{it-1}}, \tag{2.2}$$

do retorno do mercado,

$$r_{Mt} = \frac{\sum_i q_{it}(div_{it} + P_{it})}{\sum_i q_{it} P_{it-1}}, \tag{2.3}$$

e da iliquidez relativa do mercado,

$$c_{Mt} = \frac{\sum_i q_{it} C_{it}}{\sum_i q_{it} P_{it-1}}, \tag{2.4}$$

onde div_{it} é o dividendo pago do activo i no mês t, P_{it} o preço de transacção e q_{it} o total de transacções do activo i no mês t. Os custos de iliquidez são medidos pelo rácio de Amihud [5] definido por

$$Iliq_{it} = \frac{1}{m_{it}} \sum_{d=1}^{m_{it}} \frac{|r^*_{itd}|}{V_{itd}} \tag{2.5}$$

onde r^*_{it} e V_{it} são, respectivamente o retorno e volume (em milhões) do dia d no mês t e m_{it} o número de observações (dias) no mês t para o activo i.

Assumindo independência temporal dos custos de iliquidez, o modelo CAPM ajustado à liquidez é estimado por

$$E\left(r_{it} - r_f\right) = E\left(c_{it}\right) + \lambda\beta_{1i} + \lambda\beta_{2i} - \lambda\beta_{3i} - \lambda\beta_{4i}, \tag{2.6}$$

onde r_f é o activo sem risco, e $\lambda = E\left(\lambda_t\right) = E(r_{Mt} - c_{Mt} - r_f)$.

A condição mais óbvia para definir liquidez é através dos custos de transacção. Quanto menores forem estes custos maior é a liquidez [6]. Os custos de transacção podem-se subdividir em custos directos e indirectos. Os primeiros são mais fáceis de medir, pois são observáveis e respeitam às comissões de corretagem, às taxas de transacção e outras comissões de processamento de transacções. A outra componente dos custos de transacção corresponde ao *spread bid-ask* e ao impacto de mercado. Em mercados organizados o *spread bid-ask* representa um custo para os investidores [4], pois num dado momento a compra é sempre efectuada ao preço *ask* e a venda é sempre efectuada a um preço *bid*, sendo que o preço *bid* nunca é superior ao preço *ask* . Por outras palavras, o *spread* corresponde ao risco de execução que o investidor enfrenta quando decide transaccionar, como estudado recentemente por Grinold e Kahn [18]. Os custos de transacção dependem também da quantidade que se deseja transaccionar, pois quanto maior é essa quantidade, maior é a diferença entre o preço médio realizado e as cotações *bid* e *ask*, por outras palavras, a própria transacção tem um impacto no preço de transacção, aumentando o preço de compra e baixando o preço de venda. O impacto de mercado é maior quando há muita informação assimétrica entre as duas partes intervenientes na transacção (diferentes conjuntos de informação e portanto diferentes expectativas quanto ao valor de equilíbrio) e quando há uma grande fricção no acesso ao mercado por partes dos potenciais investidores. Estes factores são, em certa medida, função da microestrutura de mercado (por exemplo, se existem ou não *market makers*).

Dada a impossibilidade de medir *ex-ante* estes custos, os autores utilizam o *spread bid-ask* realizado como uma *proxy* dos custos de transacção. De facto, existe uma relação directa entre o *spread bid-ask* e os custos de impacto de mercado, pois quanto maior é o *spread bid-ask* menor é a profundidade do mercado e portanto maior é o potencial impacto de mercado de uma dada transacção. Portanto, o *spread bid-ask* é utilizado como uma medida da liquidez dos activos.

Amihud e Mendelsen [3] propõem que a liquidez afecta os preços dos activos porque os investidores requerem uma compensação por enfrentarem custos de transacção. Deste modo, se a liquidez afecta o preço dos activos então a teoria financeira deve incorporar o efeito da liquidez. Embora custos de transacção na ordem dos 0.5% do valor do activo, como comummente é assumido na literatura, possam parecer negligenciáveis, o seu efeito é considerável porque estes custos ocorrem sempre que o activo é transaccionado. Ora, tratando-se de estratégias de transacção dinâmicas, o efeito é cumulativo ao longo do horizonte temporal do investidor, podendo ser completamente proibitivos se o rebalanceamento do portefólio for frequente. Assim, as decisões de investimento e composição do portefólio devem ser baseadas na liquidez dos activos bem como nos seus retornos esperados e risco.

2.2 Modelos com Incorporação dos Custos de Transacção

Os modelos de selecção de portefólios usualmente assumem que os mercados são perfeitos e portanto ignoram os custos de transacção inerentes à aquisição desses portefólios e eventual rebalanceamento. No entanto, o efeito dos custos de transacção está longe de ser marginal e é efectivamente uma das principais preocupações dos investidores institucionais, sobretudo em mercados financeiros periféricos, como é o caso do mercado português, podendo absorver uma parte significativa dos potenciais retornos.

Em mercados perfeitos, alterações marginais nos *inputs* do modelo tradicional média-variância podem resultar em alterações substanciais das proporções dos activos no portefólio, que de outra forma seriam mitigadas se os custos de transacção fossem considerados explicitamente.

Uma possibilidade muito simples de incorporar os custos de transacção na optimização do portefólio, é fazê-lo de forma indirecta, sem definir explicitamente a função de custos de transacção, através de uma restrição adicional sobre o *turnover* do portefólio [15]. Portefólios com altos *turnovers* resultam em altos custos de transacção tornando os rebalanceamentos ineficientes e dispendiosos. Por isso, alguns gestores de portefólio limitam o montante de *turnover* permitido quando executam transacções dentro do seu portefólio.

Comummente, as restrições de *turnover* são impostas para cada activo como

$$|x_i| \leq u_i, \tag{2.7}$$

onde x_i é a proporção a transaccionar do activo i, tal que $x_i = w_i - w_{i0}$, onde w_{i0} e w_i são as proporções do activo i antes e após rebalanceamento, respectivamente. Portanto, a magnitude absoluta da diferença entre o peso inicial e final do activo i no portefólio é restrita por um limite superior u_i. Por vezes, a restrição é imposta para minimizar o *turnover* do portefólio como um todo

$$\sum_{i=1}^{N} |x_i| \leq U, \tag{2.8}$$

ou seja, a diferença absoluta total entre os pesos iniciais e finais dos N activos é restrita por um limite superior U. Sob esta restrição única, pode haver alguns activos com desvios mais acentuados que outros em termos de pesos iniciais, mas o desvio total é limitado. Os limites para estas restrições de *turnover* são frequentemente impostas com base no volume médio diário de cada activo i.

Pogue [25] estabelece uma das primeiras extensões ao modelo média-variância, com a inclusão directa dos custos de transacção. Muitos autores incluindo, por exemplo, Schreiner [27], Adcock e Meade [2], Lobo et al. [20], Mitchell e Braun [22] têm apresentado outras extensões e modificações àquela primeira abordagem. Estas formulações podem ser sintetizadas no seguinte problema de optimização:

$$\begin{gathered} max_w \; w^{'}\mu - \lambda \; w^{'}\Omega w - \lambda_{ct} \; ct \\ sujeito \; a \; \mathbf{1}^{'}w = 1, \quad \mathbf{1} = \left[1, 1, \ldots, 1\right]' \end{gathered} \tag{2.9}$$

A variável de decisão é o vector coluna w das proporções; μ representa o vector coluna dos retornos esperados, Ω representa a matriz de variâncias-covariâncias, ct denota uma função de penalização dos custos de transacção e λ e λ_{ct} são parâmetros de aversão ao risco de preço e aos custos de transacção, respectivamente. Em suma, o objectivo é maximizar o retorno esperado ajustado quer ao risco de preço quer aos custos de transacção.

Realisticamente, a modelação dos custos de transacção envolve a aplicação de funções não lineares, e, embora exista *software* para problemas de optimização não linear, o tempo computacional requerido para resolver tais problemas é muitas vezes demasiado longo para uma aplicação atempada na gestão do investimento, enquanto a qualidade da solução não é garantida. Consequentemente, os gestores de portefólios, no âmbito do modelo média-variância, utilizam frequentemente aproximações às funções dos custos de transacção. Uma dessas simplificações consiste em assumir que os custos de transacção dependem apenas dos pesos do portefólio, ou mais especificamente, das proporções a transaccionar, x_i.

Os custos de transacção são aditivos, i.e., os custos de transacção do portefólio são iguais à soma dos custos de transacção de cada activo:

$$ct(x) = \sum_{i=1}^{N} ct_i \; (x_i), \tag{2.10}$$

onde N é o número total de activos, ct_i é uma função custo de transacção para o activo i e x_i a proporção do activo i a ser transaccionada. A função de custo de transacção ct_i é muitas vezes parametrizada como uma função quadrática [14] da forma

$$ct_i(x_i) = \alpha_i 1_{\{x_i \neq 0\}} + \beta_i |x_i| + \gamma_i |x_i|^2 , \tag{2.11}$$

onde os coeficientes α_i, β_i e γ_i podem ser diferentes para cada activo i, e $1_{\{x_i \neq 0\}}$ é a função indicatriz que é igual a 1 quando $x_i \neq 0$ e zero, caso contrário.

Quando todos os $\alpha_i = 0$, o problema de optimização é quadrático sob a forma

$$max_w w' \mu - \lambda w' \Omega w - \lambda_{ct} \left(\beta' |x| + \Gamma |x|^2 \right) \tag{2.12}$$

sujeito às usuais restrições, onde $\beta' = (\beta_1, \ldots, \beta_N)$ e

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \ldots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \gamma_N \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

Alternativamente, a função custo de transacção pode assumir-se como uma taxa crescente que se altera a partir de certos patamares [14]. Por exemplo, é mais baixa no intervalo de 0% a 15% do volume diário que no intervalo 15% a 40%. Matematicamente, essa função pode ser expressa da seguinte forma

$$ct(q) = \begin{cases} s_1 q, \quad 0 \leq q \leq 0.15V \\ s_1(0.15V) + s_2(q - 0.15V), \quad 0.15V \leq q \leq 0.40V \\ s_1(0.15V) + s_2(0.25V) + s_3(q - 0.40V), \quad 0.40V \leq q \leq 0.55V \end{cases} \tag{2.14}$$

onde s_1,s_2, s_3 representam os diferentes declives que a função apresenta, V o volume total diário transaccionado do activo i e q o montante transaccionado pelo investidor. Assim, um portefólio com N activos, terá como custos de transacção totais a soma dos custos de transacção de cada activo, e cada activo tem o termo de penalização

$$ct_i(x_i) = \lambda_{ct} \sum_{i=1}^{N} \left(s_{1,i}\ y_{1,i} + s_{2,i}\ y_{2,i} + s_{3,i}\ y_{3,i} \right), \tag{2.15}$$

com $x_i = |w_i - w_{i0}| = y_{1,i} + \ y_{2,i} + \ y_{3,i}$.

No entanto, a ideia que os custos de transacção aumentam a uma dada taxa fixa dentro de patamares não é aplicável na generalidade, pois na maioria dos casos os custos de transacção aumentam a taxas crescentes independentemente do volume de transacção diário.

Um dos estudos empíricos mais recentes e completos sobre a inclusão de custos de transacção na selecção de portefólios é DeMiguel et al. [12]. Neste artigo, os autores apresentam um modelo média-variância multiperíodo em que o investidor enfrenta custos de transacção quadráticos. Assim, o objectivo do investidor é

$$max_{w_i} U\left(\{w_i\}\right) = \sum_{i=0}^{\infty} (1-\rho)^{i+1} \left(w_i'\mu - \frac{\gamma}{2} w_i'\Omega w_i\right) - (1-\rho)^i \left(\frac{\lambda}{2} x_i'\Omega x_i\right), \tag{2.16}$$

onde w representa as proporções a investir nos N activos com risco, ρ é um factor impaciência do investidor e γ é um parâmetro de aversão ao risco absoluto. O termo $(\lambda/2)x_i'\Omega x_i$ é o custo de transacção quadrático, onde λ é o parâmetro de custo de transacção e $x_i = w_i - w_{i0}$. Ω é a matriz de variâncias-covariâncias dos retornos dos activos. Na aplicação empírica é considerado um parâmetro de aversão absoluta ao risco de $\gamma = 10^-8$, que corresponde a uma aversão relativa de um fundo mobiliário que tem cem milhões para investir. O factor de desconto é de $\rho = 1 - exp(-0.1/260)$, que corresponde a um desconto anual de 10%. O parâmetro de custos de transacção é $\lambda = 3 \times 10^-7$, tal como em Garleanu e Pedersen [16].

Sem perda de generalidade, o activo sem risco é considerado igual a zero. Os autores analisam uma base com 15 futuros sobre mercadorias com maturidade de 3 meses, 48 portefólios industriais (48IndP) e 100 portefólios Fama-French *on size and book-to-market* (100FF) retirados do *website* de Kenneth French e ainda uma base de dados de acções individuais com cem acções aleatoriamente seleccionadas no início de cada ano a partir do índice S&P500 (SP100). Os dados respeitam a preços diários para o período de 7/07/2004 a 19/09/2012. São considerados oito portefólios diferentes para a análise empírica comparativa, sendo um dos critérios para a sua formação a inclusão ou não de custos de transacção na selecção dos portefólios. O desempenho dos portefólios apresentados é avaliado através do rácio de Sharpe [26] com incorporação dos custos de transacção, sendo os retornos do portefólio líquidos de custos de transacção definidos por

$$r_t = \left(\hat{w}_{t-1}\right)' r_t - \tilde{\lambda} x\hat{_{t-1}}' \Omega \hat{x}_{t-1}', \tag{2.17}$$

onde $\hat{x}_{t-1} = \Delta\hat{w}_{t-1}$, sendo $\hat{w}_{t-1}$ o vector com os pesos do portefólio estimados no período $t-1$ e r_t o vector das alterações de período fora da amostra .

Sumariamente, os resultados são robustos e indicam que os portefólios que têm em conta os custos de transacção apresentam melhores resultados fora da amostra que os portefólios que os ignoram. Ou seja, a incorporação dos custos de transacção na escolha do portefólio tem um impacto positivo e estatisticamente significativo no seu desempenho após custos de transacção.

Capítulo 3

Metodologia

3.1 Modelos Alternativos de Selecção de Portefólios

A abordagem do presente estudo prende-se com a incorporação dos custos de transacção, objectivamente inferidos do mercado, e portanto da liquidez, na função objectivo evitando no entanto a atribuição de um valor subjectivo ao parâmetro de aversão aos custos de transacção. Desta forma é possível medir se os ganhos resultantes de poupanças nos custos de transacção compensam ou não as perdas em termos quer de aumento de risco de preço quer em termos de diminuição do retorno do portefólio antes de custos de transacção. Esta medição é efectuada comparando o desempenho deste modelo fora da amostra, antes e após custos de transacção, com o desempenho de outros modelos tradicionais que não consideram os custos de transacção.

1. Portefólio *Naive*

Este portefólio não requer optimização, sendo constituído por todos os títulos em proporções iguais e constantes, ou seja, $w_i = \frac{1}{N}, i = 1, 2, \ldots, N$, onde N é o número total de títulos a analisar. Esta estratégia pretende captar os efeitos benéficos da diversificação. A introdução desta estratégia neste estudo deve-se às conclusões de DeMiguel et al. [10], que avaliam catorze modelos sobre sete base de dados diferentes e revelam que nenhuma estratégia é consistentemente melhor que a estratégia $1/N$.

2. Portefólio de Variância Mínima

A estratégia de variância mínima define um portefólio de N activos que minimiza a variância dos retornos. Ao implementar esta estratégia só é considerado a estimação da matriz das variâncias-covariâncias dos retornos dos activos, ignorando-se por completo as estimações das médias dos retornos. Este modelo poderá apresentar bons resultados devido à não inclusão da média, a principal fonte de erros de estimação no problema de optimização.

Neste modelo, assim como em todos os outros modelos de optimização aqui considerados, a primeira restrição inviabiliza a realização de vendas a descoberto por duas razões: são várias as ocasiões em que este tipo de intervenção no mercado são legalmente impedidas pelas autoridades reguladoras, noutras ocasiões é impossível realizar vendas a descoberto porque simplesmente não existem activos para empréstimo e os custos de transacção destas operações são por vezes proibitivos. Além disso, esta restrição confere uma maior estabilidade às proporções, tal como está documentado na literatura, e portanto reduz os eventuais custos de transacção.

O problema de optimização é o seguinte:

$$\begin{aligned} min_w \ \sigma_P &= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} w_i w_j \sigma_{ij} \\ s.\ a \ \ 0 &\leq w_i \leq 1 \\ &\sum_{i=1}^{N} w_i = 1, \end{aligned} \tag{3.1}$$

tal que $\Omega = [\sigma_{ij}]$ é a matriz de variâncias-covariâncias com $\sigma_{ij} = E\left[(r_i - \mu_i)(r_j - \mu_j)\right]$. Esta matriz é estimada neste modelo e nos seguintes pelas covariâncias incondicionais

$$\hat{\sigma}_{ij} \approx \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(r_{it} - \hat{\mu}_i)(r_{jt} - \hat{\mu}_j), \tag{3.2}$$

onde

$$\hat{\mu}_i \approx \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{N} r_{it}, \quad i = 1, 2, \ldots, N, \tag{3.3}$$

sendo T a dimensão da janela de estimação. As taxas de rentabilidade r_{it} utilizadas nas estimações neste modelo e nos seguintes são sempre taxas de rentabilidade contínuas.

3. Portefólio de Mercado

De acordo com o CAPM, o portefólio de mercado é o portefólio sobre a fronteira eficiente com o mais alto rácio de Sharpe. A determinação deste portefólio é efectuada de acordo com

$$\begin{aligned} & max_w \frac{\mu_P}{\sqrt{\sigma_P^2}} \\ s.\ a \ \ 0 &\leq w_i \leq 1 \\ &\sum_{i=1}^{N} w_i = 1 \end{aligned} \tag{3.4}$$

sendo a rentabilidade média do portefólio dada por

$$\hat{\mu}_P = \sum_{i=1}^{N} w_i \hat{\mu}_i \tag{3.5}$$

Note-se que neste modelo (como no próximo) a taxa de juro sem risco é considerada igual a zero, o que não se repercute numa perda de generalidade [12].

3.2 Portefólio com máximo Rácio de Sharpe Condicional

Este portefólio é obtido através da maximização do rácio de Sharpe considerando rentabilidades médias condicionais e a inclusão de custos de transacção. O problema tem a seguinte forma

$$max_w \frac{\mu_P - \bar{ct}_P}{\sqrt{\sigma_P^2}} \tag{3.6}$$

$$s.\ a \quad 0 \leq w_i \leq 1$$

$$\sum_{i=1}^{N} w_i = 1 \tag{3.7}$$

onde $\bar{ct}_P$ é o custo médio de transacção relativo diário durante o período em que o portefólio se mantém inalterado, i.e., entre os dias de rebalanceamento consecutivos, $n = t - t_0$. Os custos de transacção ct_{Pt} para cada dia do período de rebalanceamento n é assim igual a

$$ct_{Pt} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{N} (b_{it}\ max\left\{0, w_{it} - w_{it_0}\right\} + s_{it}\ max\left\{0, w_{it_0} - w_{it}\right\}) \tag{3.8}$$

Portanto w_{it_0} é a proporção do título i no portefólio antes do rebalanceamento efectuado em t. Se $w_{it} > w_{it_0}$ ocorre uma compra e o custo de transacção relativo é $b_{it} = (pa_{it} - p_{it})/p_{it}$, sendo pa_{it} e p_{it} os preços *ask* e de transacção do activo i no momento t, respectivamente. Se $w_{it} < w_{it_0}$ ocorre uma venda e o custo de transacção relativo é $s_{it} = (p_{it} - pb_{it})/p_{it}$, onde pb_{it} é o preço *bid* do activo i no momento t. O modelo é bastante flexível permitindo a diferenciação dos custos de transacção entre compra e venda, entre activos e a sua evolução ao longo do tempo.

Basicamente, o procedimento de transacção subjacente a este neste modelo é o seguinte: o investidor tem um portefólio adquirido anteriormente ao preço P_{t_0}; no início do dia t, avalia o seu portefólio tendo em conta a informação referente aos preços de transacção e aos preços *bid* e *ask*, isto é, tendo em conta o conjunto de informação

$$\phi_t = \{r_{it-1}, \ldots, r_{it_0}, \ldots, r_{it-T}; s_{it-1}, \ldots, s_{it_0}, \ldots, s_{it-T}; b_{it-1}, \ldots, b_{it_0}, \ldots, b_{it-T}\} \tag{3.9}$$

No final do dia t realiza as transacções desejadas e incorre nos custos de transacção, que dispersos linearmente pelos dias em que o portefólio se manteve inalterado, resultam num custo diário de ct_{Pt}. Na implementação deste modelo são utilizadas rentabilidades individuais médias e os custos de transacção médios condicionais

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_{Pt} &= E\left(\mu_{Pt}|r_{Pt-1},\ldots,r_{Pt_0},\ldots,r_{Pt-T}\right) = \\ &= \sum_{i=1}^{N} w_{it}\ E\left(\mu_{it}|r_{it-1},\ldots,r_{it_0},\ldots,r_{it-T}\right) \qquad (3.10)\end{aligned}$$

$$\hat{b}_{it} = E\left(b_{it}|b_{it-1},\ldots,b_{it_0},\ldots,b_{it-T}\right) \qquad (3.11)$$

$$\hat{s}_{it} = E\left(s_{it}|s_{it-1},\ldots,s_{it_0},\ldots,s_{it-T}\right) \qquad (3.12)$$

Dado que as séries dos retornos são usualmente estacionárias e as séries dos custos de transacção relativos devem ser estacionárias (os preços de transacção e as cotações *bid* e *ask* partilham o mesmo *trend* estocástico, logo estes preços estão cointegrados e a sua diferença é estacionária), então a estimação destes valores foi efectuada com recurso a um processo auto-regressivo e média móvel, com ordem $p = 1$ e $q = 1$. Um processo estacionário $Y = (Y_t, t \in \mathbb{Z})$ admite uma representação *ARMA(p,q)*

$$Y_t - \varphi_1 Y_{t-1} - \ldots - \varphi_p Y_{t-p} = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \ldots - \theta_q \varepsilon_{t-q}, \qquad (3.13)$$

onde $\varphi_p \neq 0, \theta_q \neq 0$ e os polinómios Φ e Θ têm as suas raízes de módulos estritamente superiores a 1. Além disso, os polinómios Φ e Θ não têm raízes em comum e $\varepsilon = (\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z})$ é um ruído branco de variância não nula [17].

3.3 O Desempenho das Estratégias

A análise do desempenho das várias estratégias de selecção de portefólios é efectuada com recurso ao rácio de Sharpe com e sem custos de transacção. Para evitar enviesamentos, quer pela não agregação temporal das taxas de rentabilidade discretas quer pela não agregação entre activos das rentabilidades contínuas, os portefólios foram avaliados em cada momento pelo seu preço e as séries de preços foram posteriormente transformadas em séries de rentabilidades contínuas.

O preço do portefólio em t é dado por

$$P_t = \sum_{i=1}^{N} q_{it_0} p_{it}, \quad com \quad q_{it_0} = w_{it_0} \frac{P_{t_0}}{p_{it_0}}, \qquad (3.14)$$

onde q_{it_0} é a quantidade do título i no portefólio em t_0. Os preços dos portefólios são normalizados assumindo $P_0 = 1$.

Considerando os custos de transacção, o preço líquido do portefólio no dia t é

$$P_t^{ct} = \sum_{i=1}^{N} q_{it_0} p_{it} - \sum_{i=1}^{N} \left(b_{it}\ max\left\{0, q_{it} - q_{it_0}\right\} + s_{it}\ max\left\{0, q_{it_0} - q_{it}\right\}\right). \qquad (3.15)$$

Assim para cada estratégia é possível calcular dois rácios de Sharpe, com e sem custos de transacção. Os rácios de Sharpe foram depois anualizados através do multiplicador $\sqrt{\frac{251}{n}}$, onde n é o número de dias por período de rebalanceamento, tal que $n = 5$, 10 e 21 [11].

O rácio de Sharpe de cada estratégia é definido como a média dos retornos fora da amostra, μ_P , dividido pelo seu desvio-padrão, σ_P:

$$RS = \frac{\mu_P}{\sqrt{\sigma_P^2}}, \tag{3.16}$$

Note-se que se considera $r_f = 0$, em conformidade com o que foi feito nas estimações.

O rácio de Sharpe com custos de transacção é definido por:

$$RS_{ct} = \frac{\mu_P - \bar{ct}_P}{\sqrt{\sigma_P^2}}, \tag{3.17}$$

onde $\bar{ct}_P$ é o custo médio de transacção relativo diário. De forma a dar maior robustez à análise do desempenho relativo das estratégias tomou-se como *benchmark* a estratégia *naive* , tal como em [10], e calcularam-se os valores-p da diferença entre rácios de Sharpe por *bootstrapping*; de acordo com o método de Ledoit e Wolf [19] (ver *apêndice A*).

Capítulo 4

Dados e Análise Preliminar

4.1 Dados

No presente estudo são considerados os títulos com elevada liquidez que pertencem ou pertenceram aos índices accionistas de mercado PSI20 (*Portuguese Stock Index*) e CAC40 (*Cotation Assistée en Continu*). Consideraram-se estes dois mercados porque ambos têm o mesmo protocolo, *EURONEXT*, mas a liquidez deve ser bastante diferente, pois o mercado accionista português é um mercado periférico enquanto o mercado francês tem características de mercado central. A selecção dos títulos foi efectuada considerando aqueles que se mantêm continuamente em transacção por mais tempo, num número igual àquele que constitui aqueles índices de mercado. A informação sobre os preços de transacção, preços *bid* e preços *ask* de fecho foi recolhida da base de dados *Datastream* (versão 5.1, 2010). Os preços encontram-se ajustados aos dividendos. As amostras iniciais respeitam os períodos de 26/09/1998 a 26/09/2014 para o PSI20 (4067 observações) e de 26/09/1994 a 26/09/2014 para o CAC40 (5220 observações). O presente estudo empírico foi desenvolvido com recurso ao *software* MATLAB (versão 8.0 R2012b).

Após uma simples inspecção das séries comprovou-se que de entre as vinte acções do PSI20, cinco continham inúmeros erros (tais como preços de transacção negativos e preços *ask* menores que *bid*) e longos períodos sem cotações. Esta situação também se verificou com três acções do CAC40 (ver *Apêndice B*). Estes títulos foram retirados da base de dados inicial. Para as restantes séries foram ainda aplicados vários filtros para resolver lacunas na base de dados e eventuais erros nos preços *bid* e *ask* (estes preços não são objecto de validação pelas bolsas, ao contrário dos preços de transacção). Os filtros foram os seguintes:

1. Dias em que não existe cotação, recorre-se a uma interpolação linear

$$p_t = \frac{p_{t+1} + p_{t-1}}{2}; \tag{4.1}$$

2. Os valores extremos do preço *bid* e *ask* que satisfazem os seguintes critérios foram

encarados como erros e substituídos pela interpolação linear dos dois preços mais próximos

(i) Taxa de crescimento diária contínua pertencente ao percentil 1% ou 99%

(ii) Taxa de crescimento diária contínua superior a 1.5 da taxa de crescimento diária contínua dos preços de transacção nesse dia;

3. Quando os preços *bid* são maiores que o preços *ask*, os valores são trocados.

	PSI20	CAC40
Número de Observações	61005	193140
Preços *ask* NaN	78	2194 (1,17%)
Preços *bid* NaN	59	1857 (0,95%)
Preços *ask* $<$ Preços *bid*	26	1573 (0,84%)
Filtro de extremos - preços *ask*	93	76
Filtro de extremos - preços *bid*	150	115
Preços de transacção $>$ Preços *ask*	1962 (3,21%)	4578 (2,43 %)
Preços de transacção $<$ Preços *bid*	1285 (2,11%)	5184 (2,75%)

Tabela 4.1: Estatísticas sobre as séries originais e a aplicação dos filtros

Na tabela 4.1 apresentam-se algumas estatísticas sobre as séries originais e correspondente aplicação dos filtros. Note-se que no contexto diário dos preços de fecho não é condição necessária que o preço de transacção esteja compreendido entre os preços *bid* e *ask*, pois os momentos de recolha de informação podem ser distintos; os preços *bid* e *ask* são registados no fecho do mercado e os preços de transacção são registados no momento da última transacção, que pode ocorrer vários minutos antes do fecho da sessão bolsista. Entre estes dois momentos podem ser retiradas ou chegarem novas ordens de bolsa ao mercado, originando por vezes melhorias das cotações *bid* e *ask* sobre os preços. Como se pode verificar, estas melhorias ocorrem em cerca de 2,5% dos dias.

4.2 Análise Preliminar

De forma a permitir uma melhor comparação entre as estratégias para os dois mercados considerou-se apenas dezasseis anos de amostra (26/09/1998 a 26/09/2014) para os activos portugueses e franceses perfazendo um total de 4067 e 4092 observações diárias, respectivamente. A partir destes dados são calculadas as séries das rentabilidades contínuas e dos *spreads* relativos a partir das quais foram calculadas algumas estatísticas que serão úteis para uma melhor interpretação dos resultados presentes no capítulo seguinte. As rentabilidades contínuas (ou retornos continuamente compostos) são obtidas por

$$r_{it} = ln\left(\frac{p_{it}}{p_{it-1}}\right) \tag{4.2}$$

onde p_{it} é o preço de transacção do activo i no dia t. O *spread bid-ask* relativo é definido por

$$sp_{it} = \frac{pa_{it} - pb_{it}}{p_{it}} \tag{4.3}$$

onde pa_{it} é o preço *ask* e pb_{it} o preço *bid* do activo i no dia t.

	PSI20		CAC40	
	r	sp	r	sp
Número de dias	4067	4067	4092	4092
Média	-0,0095	1,3287	0,0227	0,2773
	(0,5752)		(0,2676)	
Mínimo	-22,0462	0,0012	-18,3875	0
Mediana	0,0000	0,9736	0,0076	0,1520
Máximo	25,8930	17,8356	15,2343	8,7088
Variância	5,2192	3,5093	4,6998	0,2441
Assimetria	0,4108	3,2864	-0,3420	7,3674
Curtose	34,7327	27,5866	22,1279	114,4287
Autocorrelação (1)	0,0125	0,5605	-0,0149	0,3416
Autocorrelação (2)	-0,0166	0,5132	-0,0285	0,2893
Autocorrelação (3)	-0,0041	0,4852	-0,0358	0,2749
Autocorrelação (4)	0,0014	0,4704	0,0024	0,2641
Autocorrelação (5)	-0,0065	0,4566	-0,0244	0,2707

Tabela 4.2: Estatísticas Descritivas

Esta tabela apresenta algumas estatísticas descritivas das rentabilidades contínuas (r), calculadas com preços de transacção, e dos *spreads bid-ask* relativos (sp) diários. Os valores correspondem a médias *cross section*, i.e., médias inter-activos e estão expressos em percentagens.

A primeira linha da tabela 4.2 indica que as acções apresentam uma rentabilidade média muito próxima de zero, sobretudo para o caso português. Durante o período considerado, apenas 1 activo do mercado português e 1 activo do mercado francês apresenta rentabilidades médias diárias diferentes de zero aos níveis de significância usuais (1%, 5% e 10%). Considerando o portefólio com proporções iguais, e fazendo uso do teste de significância de médias (teste t) obtém-se os valores-p 0,5752 e 0,2676 para o mercado português e francês, respectivamente. A média do *spread bid-ask* relativo apresenta uma grande disparidade entre os dois mercados: o mercado português apresenta um valor médio de cerca de 1,33% enquanto no caso do mercado francês este valor é de apenas 0,27%. Esta disparidade põe precisamente em relevo a diferença entre os níveis de liquidez dos dois mercados.

Durante o período em estudo houve uma acção portuguesa que em determinado dia viu o seu preço de transacção descer em cerca de 22% e uma acção francesa que sofreu uma diminuição de 18%. O *spread bid-ask* relativo apresenta um mínimo bastante distante da sua média no mercado português e um valor nulo no caso francês. Como seria de esperar a mediana das rentabilidades são praticamente nulas nos dois mercados e no caso dos *spreads* este valor é seis vezes mais alto no caso português do que no francês. O mercado português apresenta ainda uma acção que num determinado dia aumentou a sua rentabilidade em cerca de 26%, mais de 10 pontos percentuais que o máximo de uma acção francesa. Por outro lado, o caso português apresenta um máximo de *spread* relativo maior que o dobro da correspondente estatística do mercado francês.

A variância das rentabilidades nos dois mercados é bastante similar, mas no que toca ao *spread* a situação afigura-se diferente. A variância do *spread bid-ask* relativo português é bastante elevada realçando a ideia de que o mercado português encontra-se substancialmente mais propenso a choques de liquidez e a variabilidade está presente não só entre activos mas também no tempo. Basta analisarmos o impacto contínuo que a crise *subprime* teve nos custos de transacção portugueses para podermos explicar este nível de grandeza da variância. A média dos custos de transacção portugueses aumentou neste período cerca de 22,13% face aos anos precedentes. No ano de 2010 assiste-se a uma diminuição dos valores médios para um patamar próximo dos valores anteriores à crise *subprime*, porém nos anos seguintes observa-se aumentos contínuos e expressivos destes custos.

Os valores da curtose são significativamente superiores àqueles da lei normal para as rentabilidades e *spreads* verificando-se o facto estilizado de não normalidade das séries financeiras. As autocorrelações das rentabilidades contínuas até à ordem 5 para os dois mercados são pouco significativas, não havendo constância no seu sinal, o que eventualmente evidencia a fraca previsibilidade da evolução diária dos retornos. Por outro lado, as autocorrelações dos *spreads* relativos são bastantes significativas, sendo a taxa de decrescimento destes valores bastante pequena. Esta constatação põe em evidência características de média móvel daí que os custos relativos tenham sido modelados através de processos *ARMA(1,1)*.

Tendo por base o que foi argumentado anteriormente facilmente se formulam algumas proposições quanto aos resultados esperados para o presente trabalho empírico:

1. Dada a maior liquidez das acções do mercado francês, os rácios de Sharpe com custos de transacção devem ser maiores neste último mercado.

2. A diminuição dos rácios de Sharpe provocada pela existência dos custos de transacção deve ser maior no caso português, para qualquer período de rebalanceamento.

3. O modelo de maximização de rácio de Sharpe condicional deve produzir rácios de Sharpe, com custos de transacção, superiores a qualquer estratégia, sendo essa superioridade crescente com a maior periodicidade de rebalanceamento.

4. O aumento da frequência de rebalanceamento produz um aumento dos rácios de Sharpe sem custos de transacção para o modelo condicional. O aumento da frequência de rebalanceamento diminui os rácios de Sharpe com custos de transacção dos modelos alternativos. O efeito do rebalanceamento sobre os rácios de Sharpe com custos de transacção do modelo condicional é incerto pois, se por um lado a previsibilidade dos retornos é maior, por outro lado também é maior o impacto negativo dos custos de transacção.

Capítulo 5

Análise de Resultados

Para medir o desempenho das diferentes estratégias fora da amostra foi utilizado o método de estimação em janela móvel. Tal como DeMiguel et al. [11], a janela móvel utilizada no presente estudo tem uma duração de 251 dias de transacção, o que corresponde basicamente a um ano civil. Foram consideradas três periodicidades de rebalanceamento: semanal, quinzenal e mensal, isto é, 5, 10 e 21 dias de transacção, o que considerando a amostra corresponde a um total de aproximadamente 760, 380 e 180 rebalanceamentos, respectivamente. A análise do desempenho do portefólio de maximização do rácio de Sharpe condicional é computacionalmente bastante intensa, pois, no caso mais complexo de rebalanceamento semanal para as acções do mercado francês, é necessário estimar 760 rebalanceamentos$\times$37 activos$\times$3 (retornos, preço de compra e preço de venda)$=$ 84360 estimações $ARMA$.

Os vários rácios de Sharpe fora da amostra com e sem custos de transacção são apresentados na tabela 5.1.

A primeira linha apresenta os rácios de Sharpe da estratégia *benchmark naive* considerando três diferentes frequências de rebalanceamento para activos do mercado português e francês. O aumento da frequência de rebalanceamento impulsiona o valor do rácio de Sharpe dos portefólios constituídos por activos portugueses. Esta trajectória ascendente não se verifica no caso dos activos franceses, mas assiste-se a uma melhoria do rácio de Sharpe com rebalanceamentos quinzenais e semanais.

O aumento da frequência de rebalanceamento possibilita maiores retornos mas também aumenta o impacto dos custos de transacção. Ou seja, os benefícios de um rebalanceamento semanal poderão não compensar se os custos de transacção totais do portefólio que o investidor terá de enfrentar/custear absorvem uma parte significativa dos seus ganhos. Mais uma vez, observa-se inconstância nos resultados do rácio de Sharpe (agora, com custos de transacção) dos activos franceses.

O portefólio de variância mínima dos activos portugueses exibe piores resultados em termos de rácio de Sharpe com e sem inclusão de transacção relativamente à estratégia *benchmark*. O valor-p apresentado que resulta da comparação entre este portefólio e

	PSI20			CAC40		
	Semanal	Quinzenal	Mensal	Semanal	Quinzenal	Mensal
Estratégia *Naive*						
RS	0,1998	0,1847	0,1765	0,4586	0,4630	0,4492
RS_{ct}	0,0838	0,1127	0,1460	0,4433	0,4526	0,4425
Variância Mínima						
RS	0,1176	0,1112	0,1351	0,9154	0,9350	0,9048
	(0,6507)	(0,6757)	(0,7952)	(0,0172)	(0,0128)	(0,0032)
RS_{ct}	-0,0972	-0,0421	0,0310	0,8728	0,9104	0,8936
	(0,3253)	(0,3735)	(0,4809)	(0,0242)	(0,0152)	(0,0060)
N	7|11|15	7|11|15	7|11|15	5|12|25	5|12|25	6|12|25
Portefólio de Mercado						
RS	0,4475	0,4816	0,6040	0,3326	0,4535	0,4772
	(0,3445)	(0,2308)	(0,0794)	(0,5529)	(0,9712)	(0,8912)
RS_{ct}	0,1378	0,2403	0,4608	0,2297	0,3756	0,4276
	(0,8590)	(0,6627)	(0,2150)	(0,3321)	(0,7600)	(0,9544)
N	2|5|13	2|5|13	2|5|13	2|7|18	2|7|18	2|8|16
Portefólio RS Condicional						
RS	0,3414	0,3482	0,3679	0,7455	0,6161	0,5033
	(0,6307)	(0,5279)	(0,3881)	(0,2300)	(0,5059)	(0,7964)
RS_{ct}	0,1950	0,2529	0,2421	0,7197	0,5257	0,4448
	(0,6937)	(0,5861)	(0,6773)	(0,7245)	(0,7343)	(0,9884)
N	2|7|15	2|6|14	2|6|15	2|8|22	2|8|20	2|8|17

Tabela 5.1: Rácios de Sharpe

Esta tabela apresenta os rácios de Sharpe do modelo proposto (Portefólio com máximo rácio de Sharpe condicional com custos de transacção) e das estratégias alternativas (Estratégia *naive*, variância mínima e portefólio de mercado). São considerados três periodicidades de rebalanceamento: semanal, quinzenal e mensal, correspondendo a 5, 10 e 21 dias de transacção, respectivamente. RS é o rácio de Sharpe com as rentabilidades antes dos custos de transacção. RS_{ct} é o rácio de Sharpe com as rentabilidades após os custos de transacção; estes custos não se incluem no cálculo da variância. Entre parêntesis encontra-se o valor-p da comparação do rácio de Sharpe de determinada estratégia com o rácio de Sharpe da estratégia *naive*; no caso de inclusão dos custos de transacção, a variância contém esses custos. No cálculo destes p-valores foi utilizado o método *bootstrapping* proposto por Ledoit e Wolf [19]. Os valores em linha de N referem-se ao número de títulos nos portefólios, apresentando-se o valor mínimo, mediana e máximo, respectivamente.

o portefólio *naive* indica-nos que para níveis de significância usuais não se rejeita a hipótese nula da diferença dos rácios de Sharpe (com e sem custos de transacção) ser igual a zero. Em algumas constituições de portefólio realiza-se um investimento em todos os activos disponíveis. O número mínimo, máximo e mediana dos activos do portefólio permanece constante à medida que a frequência de rebalanceamento diminui.

A estratégia de variância mínima é a estratégia com melhor desempenho fora da amostra quando considerados os trinta e sete activos do mercado francês. De facto, mesmo com a inclusão dos custos de transacção este portefólio apresenta resultados significativamente melhores que qualquer outra estratégia. Os reduzidos valores-p corroboram estes resultados e evidenciam a consistência desta estratégia. O valor máximo de 15 títulos utilizados na construção do portefólio afigura-se reduzido dado número de títulos disponíveis para transaccionar (37).

O portefólio de mercado apresenta-se como a melhor estratégia a adoptar no momento de investir em activos portugueses. No entanto, o valor-p indica-nos pouca consistência nestes resultados quando comparado com a estratégia *naive*. Todavia, a inclusão dos custos de transacção totais do portefólio faz diminuir drasticamente os valores dos rácios de Sharpe. Isto é, os investidores quando confrontados com os custos de transacção irão perder grande parte dos seus ganhos resultantes da utilização desta estratégia. Os valores-p elevados dos rácios de Sharpe com custos de transacção evidenciam uma maior probabilidade da estratégia *benchmark* vir a ter melhores desempenhos que esta estratégia quando incorporados os custos de transacção. O aumento da frequência de rebalanceamento não altera o número mínimo, máximo e mediana de títulos que compõe o portefólio.

Contrariamente ao caso português, o portefólio de mercado aplicado aos activos franceses exibe os piores resultados de entre as estratégias consideradas. Ou seja, a utilização da média como *input* introduz um erro de estimação que empobrece os resultados fora da amostra. Apesar disso, os valores de rácios de Sharpe com inclusão dos custos de transacção desta estratégia são melhores que a maioria dos rácios apresentados no caso português; este resultado confirma a primeira hipótese argumentada anteriormente. Tal deve-se aos elevados custos de transacção que o mercado português detém.

O modelo de alocação de activos apresentado neste estudo não apresenta os melhores resultados em termos de rácio de Sharpe (no mercado português, o aumento da frequência de rebalanceamento não aumenta este rácio), mas apresenta melhorias em termos de rácio de Sharpe com inclusão dos custos de transacção para o caso português. Essa melhoria sucede quando o investidor executa rebalanceamentos semanais e quinzenais. Os elevados custos de transacção existentes no mercado bolsista português poderão explicar o bom desempenho deste modelo. Estamos perante um mercado periférico, com poucos activos e dispares em liquidez.

Este modelo apresenta ainda os segundos melhores desempenhos em termos de alocação de activos franceses. A mediana e valor máximo de número de activos que constituem o portefólio diminui em relação à variância mínima.

Apesar de alguns dos resultados esperados não se verificarem integralmente, o modelo proposto apresenta bons resultados. No mercado francês, as estratégias a considerar no momento de investir são variância mínima seguida de maximização do rácio de Sharpe condicional. No mercado português, a estratégia apresentada neste estudo seguida do portefólio de mercado.

Capítulo 6

Conclusões

No presente estudo é desenvolvido um modelo de maximização do rácio de Sharpe condicional que lida com os custos de transacção decorrentes da execução de ordens de bolsa. Para tal, esta abordagem recorre a estimações dos retornos e dos custos de transacção, distinguindo entre compras e vendas, com base em dados históricos de activos constituintes e ex-constituintes dos índices bolsistas português e francês. Estes mercados apresentam níveis de liquidez substancialmente diferentes.

A estratégia adoptada apresenta melhores resultados que a estratégia *benchmark naive* nos dois mercados de activos. No caso francês os melhores resultados advém da estratégia de mínima variância, seguida da nova estratégia apresentada neste estudo. Os portefólios constituídos pelos activos portugueses exibem os melhores resultados de entre as estratégias consideradas, nomeadamente, quando se executa rebalanceamentos semanais ou quinzenais. A presença de elevados custos de transacção neste mercado acaba por eliminar grande parte dos retornos dos activos, sendo este um dos motivos pelo qual esta estratégia é bem-sucedida.

A falta de robustez dos resultados (nenhuma estratégia é estatisticamente melhor que a estratégia *naive*, em termos de rácio de Sharpe, à excepção da estratégia variância mínima no caso francês) é, muito provavelmente, decorrente dum aspecto muito particular das séries em estudo. Durante o período considerado, apenas 2 (Inapa e Sonae Indústria) activos do mercado português e 2 (Bollore e Dassault Aviation) activos do mercado francês apresentam rentabilidades médias mensais diferentes de zero ao nível de significância de 5%. Se considerarmos o portefólio $1/N$, as rentabilidades médias mensais durante todo o período são de -0,19% e 0,49% para o mercado português e francês, respectivamente, com valores-p do teste de significância de médias de 0,6694 e 0,2685. Portanto, a falta de significância das médias traduz-se necessariamente na falta de significância dos rácios de Sharpe.

O presente estudo poderia eventualmente produzir resultados mais robustos através da consideração, por exemplo, de estimações recursivas dos processos $ARMA$, do estudo individual do melhor modelo de previsão a aplicar em cada momento a cada série (rentabilidades, preços de compra e de venda), da introdução de custos de transacção fixos ou ainda realizando estimações conjuntas das rentabilidades e dos custos de transacção através de VAR (*Vector Autoregressive*).

Em suma, conclui-se que existem indícios de que o modelo proposto é competitivo em relação aos modelos alternativos e que tem mais hipóteses de sucesso em mercados periféricos, com reduzida liquidez, como o mercado português.

Apêndice A

Ledoit e Wolf [19] providenciam um método para a obtenção de valores-p para o teste sobre a diferença entre rácios de Sharpe. O método utiliza o procedimento *bootstrapping* dada a impossibilidade de aplicar inferência estatística assimptótica, devido ao facto das séries financeiras terem caudas mais pesadas que a distribuição normal.

No presente estudo, o método é aplicado considerando a estratégia *naive* como *benchmark*. Deste modo, a estratégia $1/N$ apresenta um retorno em t de r_{nt} e a estratégia a comparar apresenta um retorno de r_{et}. Ou seja, um total T, de pares de retornos $(r_{e1}, r_{rn1}), \ldots, (r_{eT}, r_{nT})$ são observados. A distribuição tem vector média μ e matriz de variâncias-covariâncias Ω dados por

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_e \\ \mu_n \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} \sigma_e^2 & \sigma_{en} \\ \sigma_{ne} & \sigma_n^2. \end{pmatrix} \tag{2}$$

A diferença entre dois rácios de Sharpe é dado por

$$\Delta = RS_e - RS_n = \frac{\mu_e}{\sigma_e} - \frac{\mu_n}{\sigma_n} \tag{3}$$

e o seu estimador é

$$\hat{\Delta} = \hat{RS}_e - \hat{RS}_n = \frac{\hat{\mu}_e}{\hat{\sigma}_e} - \frac{\hat{\mu}_n}{\hat{\sigma}_n} \tag{4}$$

Os autores propõem assim testar a hipótese nula $H_0 : \Delta = 0$ por inversão de um intervalo de confiança *bootstrap*. Isto é, constrói-se um intervalo de confiança *two-sided bootstrap* com um nível nominal $1 - \alpha$ para Δ. Se este intervalo não contém zero, H_0 é rejeitado ao nível nominal α. É proposto um intervalo de confiança simétrico *studentized bootstrap*, que pode ser aproximado por

$$\mathcal{L}\left(\frac{\left|\hat{\Delta} - \Delta\right|}{s\left(\hat{\Delta}\right)}\right) \approx \mathcal{L}\left(\frac{\left|\hat{\Delta}^* - \Delta\right|}{s\left(\hat{\Delta}^*\right)}\right) \tag{5}$$

onde Δ é a diferença entre rácios de Sharpe, $\hat{\Delta}$ é a diferença estimada a partir dos dados, $s\left(\hat{\Delta}\right)$ é um erro padrão estimado para $\hat{\Delta}$, $\hat{\Delta}^*$ é a diferença estimada e $s\left(\hat{\Delta}^*\right)$ é o erro padrão estimado para $\hat{\Delta}^*$ .Por fim, $\mathcal{L}(X)$ denota a distribuição da variável aleatória X. Para gerar dados *bootstrap* é usado o bloco circular *bootstrap* de Politis e Romano [24].

Por vezes, pode ser mais desejável obter um valor-p que pode ser computado como o mais pequeno valor de α para o qual o correspondente intervalo de confiança $1-\alpha$ não contém zero. Assim, tem-se que o teste estatístico t -*Student* dado por d,

$$d = \frac{\left|\hat{\Delta}\right|}{s\left(\hat{\Delta}\right)} \tag{6}$$

e a estatística centrada *t-Student* computada a partir da amostra *bootstrap* m é dada por $d^{*,m}$, $m = 1, \ldots, M$

$$\tilde{d}^{*,m} = \frac{\left|\hat{\Delta}^{*,m} - \hat{\Delta}\right|}{s\left(\hat{\Delta}^{*,m}\right)} \tag{7}$$

onde m é o número de reamostras *bootstrap*. Então o p-valor é dado por

$$PV = \frac{\left\{\tilde{d}^{*,m} \geq d\right\} + 1}{M+1} \tag{8}$$

Para informação mais detalhada, remete-se o leitor para [19]. As rotinas necessárias para implementar o procedimento em Matlab estão publicamente disponíveis na página pessoal de Michael Wolf: `http://www.econ.uzh.ch/faculty/wolf/publications.html#10`.

Apêndice B

Os activos que no momento de recolha dos dados não estavam indexados nos respectivos índices mas foram seus constituintes apresentam-se assinalados com o símbolo (*). Os activos excluídos da base de dados após simples inspecção das séries estão assinalados com o símbolo (∇).

AMORIM (*)	PORTUCEL (*)
BCP	PT
BPI	REDITUS ∇
CIMPOR (*)	SCP (*) ∇
COMPTA (*) ∇	SEMAPA (*)
ESTORIL SOL (*) ∇	SOC INV (*)
INAPA (*)	SONAE
JERÓNIMO MARTINS	SONAE INDUSTRIA
MOTA ENGIL	SUMOL (*)
OREY (*)	TOYOTA (*) ∇

Tabela 1: Activos constituintes e ex-constituintes do índice PSI20

ACCOR	LMVH
AIR LIQUIDE	LOREAL
AIR FRANCE (*) ∇	MICHELIN
ALCATEL ∇	NATIXIS (*)
AXA	PERNORD RICARD
BNP	PEUGEOT (*)
BOLLORE (*)	PUBLICIS
BOUYGUES	SAFRAN
CAP	SAINT GOBAIN
CARREFOUR	SANOFI
CASINO GUICHARD (*)	SCHENEIDER
CHRISTIAN DIOR (*)	SOCIETÉ GENERALI
DANONE	SODEXO (*)
DASSAULT AVIATION	THALES (*)
ESSILOR	TOTAL
GECINA (*)	UNIBAIL
HERMES (*)	VALEO
KERING	VINCI
KLEPIERRE (*)	VIVENDI ∇
LAFARGE	ZODIAC AEROSPACE (*)

Tabela 2: Activos constituintes e ex-constituintes do índice CAC 40

Bibliografia

[1] V. V. Acharya e L. J. Pedersen. *Asset Pricing With Liquidity Risk*. Journal of Financial Economics, 77:375-410, 2005.

[2] C. J. Adcock e N. Meade. *A Simple Algorithm To Incorporate Transaction Costs In Quadratic Optimization*. European Journal Of Operational Research, 79:85-94, 1994.

[3] Y. Amihud e H. Mendelson. *Asset Pricing And The Bid-Ask Spread*. Journal of Financial Economics, 17:223-249, 1986.

[4] Y. Amihud e H. Mendelson. *Liquidity, Asset prices And Financial Policy*. Financial Analysts Journal, 47:56-66, 1991.

[5] Y. Amihud. *Illiquidity And Stock Returns: Cross-section And Time-series Effects*. Journal of Financial Markets , 5:31-56, 2002.

[6] Y. Amihud, H. Mendelson e L. H. Pedersen. *Market Liquidity: Asset Pricing, Risk And Crises*. Cambridge University Press, 1ª Edição, 2013.

[7] T. Bollerslev e I. Domowitz. *Trading Patterns And Prices In The Interbank Foreign Exchange Market*. The Journal of Finance, 48:1421-1443, 1993.

[8] M. Brunnermeier e L. H. Pedersen. *Predatory Trading*, Journal of Finance, 60:1825-1863, 2005.

[9] T. Chordia, A. Subrahmanyam e R. Roll. *Market Liquidity And Trading Activity*. The Journal of Finance, 56:501-530, 2000.

[10] V. DeMiguel, L. Garlappi e R. Uppal. *Optimal Versus Naive Diversification: How Inefficient Is The 1/N Portfolio Strategy?*. The Review of Financial Studies, 22: 1915-1953, 2009.

[11] V. DeMiguel, Y. Plyakha, R. Uppal e G. Vilkov. *Improving Portfolio Selection Using Option-Implied Volatility And Skewness*. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 48:1813-1845, 2013.

[12] V. DeMiguel, A. Martín-Utrera e F. J. Nogales. *Parameter Uncertainty In Multiperiod Portfolio Optimization With Transaction Costs*. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 27:1031-1073, 2014.

[13] I. Domowitz. *Liquidity, Transaction Costs And Reintermediation In Electronics Market*. Journal of Financial Services, 22:141-157, 2002.

[14] F. J. Fabozzi, P. N. Kolm, D. A. Pachamanova e S. M. Focardi. *Robust Portfolio Optimization And Management*. Jonh Wiley & Sons, Inc., 1ª Edição, 2007.

[15] F. J. Fabozzi e H. M. Markowitz. *Equity Valuation And Portfolio Management*. Jonh Wiley & Sons, Inc., 1ª Edição, 2011.

[16] N. Garleanu e L. H. Pedersen. *Dynamic Trading With Predictable Returns And Transaction Costs*. The Journal of Finance, 68:2309-2340, 2013.

[17] E. Gonçalves e N. Mendes-Lopes. *Séries Temporais. Modelações Lineares E Não Lineares*. Sociedade Portuguesa de Estatística, 2ª Edição, 2008.

[18] R. Grinold e R. Kahn. *Active Portfolio Management*. McGraw-Hill, 2ª Edição, 1999.

[19] O. Ledoit e M. Wolf *Robust Performance Hypothesis Testing With The Sharpe Ratio*. Journal of Empirical Finance, 15:850-859, 2008.

[20] M. S. Lobo, M. Fazel e S. Boyd. *Portfolio Optimization With Linear And Fix Transaction Costs And Bounds On Risk*. Annals of Operations Research, 152:341-365, 2007.

[21] H. M. Markowitz. *Portfolio Selection*. The Journal of Finance, 7:77-91, 1952.

[22] J. E. Mitchell e S. Braun. *Rebalancing A Investment Portfolio In the Presence Of Transaction Costs*. Journal Optimization Methods Software , 28:523-542, 2013.

[23] L. Pástor e R. F. Stambaugh. *Liquidity Risk And Expected Stock Returns*. Journal of Political Economy, 111:642-685, 2003.

[24] D. N. Politis e J.P. Romano. *A Circular Block-resampling Procedure For Stationary Data*. R. LePage e L. Billard,(Eds), Exploring the Limits of Bootstrap. John Wiley, 263-270, 1992.

[25] G. A. Pogue. *An Extension Of The Markowitz Portfolio Selection Model To Include Variables Transactions' costs, Short Sales, Leverage Policies And Taxes*. The Journal of Finance, 25:1005-1027, 1970.

[26] W. F. Sharpe. *Mutual Fund Performance*. Journal of Business, 39:119-138, 1966.

[27] J. Schreiner. *Portfolio Revision: A Turnover-Constrained Approach*. Financial Management, 9:67-75, 1980.

[28] The MathWorks, Inc. *Econometrics Toolbox ^{TM} User's Guide*. Versão R2014b, 2014.

[29] The MathWorks, Inc. *Financial Toolbox ^{TM} User's Guide*. Versão 2.3, 2003.